Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Ianuarie 2022
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timp de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $a=\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left\{2022+\sqrt{2}\right\}$ este număr natural, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

5p **2.** Determinaţi mulţimea valorilor întregi ale numărului real m, pentru care reprezentarea graficului funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$ nu intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\dfrac{\lg x}{\lg(x+2)}=\dfrac{1}{2}$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbf{N}^*$ știind că numărul submulțimilor nevide cu un număr par de elemente ale unei mulțimi cu n elemente este 511.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1,2)$ și dreapta d: $2x-3y+1=0$. Determinați ecuația dreptei care trece prin A și este perpendiculară pe d.

5p **6.** Determinați măsura unghiului A al unui triunghi ABC, știind că $\sin A+\cos A=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ a & i & a\\ -1 & a & -1\end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$ şi a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det A(0)=i$.

5p **b)** Demonstraţi că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Calculaţi $\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2022 ori}}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x\circ y=xy-6x-6y+42$.

5p **a)** Arătaţi că $x\circ y=(x-6)(y-6)+6$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Determinaţi perechile de numere întregi (x,x'), unde x' este simetricul lui x în raport cu legea „∘“.

5p **c)** Calculaţi $\dfrac{2022}{1}\circ\dfrac{2022}{2}\circ\dfrac{2022}{3}\ldots\circ\dfrac{2022}{2022}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg}x-\ln(x^2+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\operatorname{arctg}x-\frac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbf{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

5p **c)** Fie funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f'(x)$. Determinați imaginea funcției g.

2. Se consideră funcția $f:(-\infty,0)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\sqrt{1-x}$.

5p **a)** Calculați $\int\frac{f^2(x)}{x}dx$, $x\in(-\infty,0)$.

5p **b)** Determinați numerele reale a,b,c astfel încât funcția $F:(-\infty,0)\to\mathbf{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{1-x}$ să fie o primitivă a funcției f.

5p **c)** Fie $G:(-\infty,0)\to\mathbf{R}$ o primitivă a funcției f. Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{G(x)}{\sqrt{(-x)^5}}$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Ianuarie 2022
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $\left\{2022+\sqrt{2}\right\}=\left\{\sqrt{2}\right\}=\sqrt{2}-\left[\sqrt{2}\right]=\sqrt{2}-1$	**3p**
	$a=\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\Rightarrow a=1\in\mathbf{N}$	**2p**
5p	**2.** $G_f\cap Ox=\varnothing\Leftrightarrow\Delta<0$	**2p**
	$\Delta<0\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow m\in\left(-2,2\right)\cap\mathbf{Z}\Leftrightarrow m\in\left\{-1,0,1\right\}$	**3p**
5p	**3.** $2\lg x=\lg\left(x+2\right)\Leftrightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine, $x=2$, care convine	**2p**
5p	**4.** Numărul submulțimilor nevide cu un număr par de elemente este:	
	$C_n^2+C_n^4+C_n^6+\ldots=2^{n-1}-C_n^0=2^{n-1}-1$	**3p**
	$2^{n-1}-1=511\Leftrightarrow 2^{n-1}=512=2^9\Leftrightarrow n-1=9\Leftrightarrow n=10$	**2p**
5p	**5.** d: $2x-3y+1=0\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\Rightarrow m_d=\frac{2}{3}$	
	$a\perp d\Rightarrow m_a\cdot m_d=-1\Rightarrow m_a\cdot\frac{2}{3}=-1\Rightarrow m_a=-\frac{3}{2}$	**3p**
	Ecuația dreptei a: $y-y_A=m_a\cdot(x-x_A)\Leftrightarrow y-2=-\frac{3}{2}(x-1)\Leftrightarrow 2y-4=-3x+3\Leftrightarrow a$: $3x+2y-7=0$	**2p**
5p	**6.** $\sin A+\cos A=0\Leftrightarrow tgA=-1$	**2p**
	$A\in(0,\pi)\Longrightarrow A=\frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1.a)** $A\left(0\right)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det A\left(0\right)=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-i+0+0-\left(-2i\right)-0-0=i$	**3p**
5p	**b)** $\det A\left(a\right)=\begin{vmatrix}1&a&2\\a&i&a\\-1&a&-1\end{vmatrix}=a^2+i$, pentru orice număr real a	**2p**
	Cum, pentru orice număr real a, $a^2+i\neq 0$, obținem că $\det A\left(a\right)\neq 0$, deci, pentru orice număr real a, matricea $A\left(a\right)$ este inversabilă	**3p**
5p	**c)** $A\left(0\right)\cdot A\left(0\right)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&i^2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I_3$	**2p**
	$\underbrace{A\left(0\right)\cdot A\left(0\right)\cdot A\left(0\right)\cdot\ldots\cdot A\left(0\right)}_{\text{de 2022 ori } A(0)}=\underbrace{\left(-I_3\right)\cdot\left(-I_3\right)\cdot\left(-I_3\right)\cdot\ldots\cdot\left(-I_3\right)}_{\text{de 1011 ori } (-I_3)}=-I_3$	**3p**

5p	**2. a)** $x \circ y = xy - 6x - 6y + 36 + 6 =$ $= x(y-6) - 6(y-6) + 6 = (x-6)(y-6) + 6$, pentru orice numere reale x şi y	2p 3p
5p	**b)** Elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$” este 7 $x' \in \mathbf{Z}$ este simetricul lui $x \in \mathbf{Z}$ dacă $x \circ x' = x' \circ x = 7$, de unde $x' = 6 + \frac{1}{x-6}$, $x \neq 6$ $x = 6$ nu este simetrizabil. Cum $x' \in \mathbf{Z}$, obţinem $x = 5$ sau $x = 7$, de unde rezultă că $(x, x') \in \{(5,5), (7,7)\}$	1p 2p 2p
5p	**c)** $x \circ 6 = 6$ şi $6 \circ y = 6$, pentru orice numere reale x şi y Deoarece legea „$\circ$” este asociativă, avem $\frac{2022}{1} \circ \frac{2022}{2} \circ \frac{2022}{3} \circ \ldots \circ \frac{2022}{2022} =$ $= \underbrace{\left(\frac{2022}{1} \circ \frac{2022}{2} \circ \ldots \circ \frac{2022}{336}\right)}_{x} \circ \frac{2022}{337} \circ \underbrace{\left(\frac{2022}{338} \circ \ldots \circ \frac{2022}{2022}\right)}_{y} = x \circ 6 \circ y = (x \circ 6) \circ y = 6 \circ y = 6$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f'(x) = \text{arctg}x + x \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} = \text{arctg}x - \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$	5p
5p	**b)** $f''(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbf{R}$ $\Rightarrow f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ f convexă pe $\mathbf{R}$	3p 2p
5p	**c)** $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f'$ crescătoare pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow$ g crescătoare pe $\mathbf{R}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ şi, cum g este continuă pe $\mathbf{R}$, rezultă că $\text{Im}\, g = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	2p 3p
5p	**2. a)** $\int \frac{f^2(x)}{x} dx = \int (x - x^2)\, dx =$ $= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$	3p 2p
5p	**b)** F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x),\ x \in (-\infty, 0)$ Se obțin valorile $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{2}{15}$, $c = -\frac{4}{15}$	2p 3p
5p	**c)** F și G primitive ale funcției $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{15}x - \frac{4}{15}\right)\sqrt{1-x} + c$, $c \in \mathbf{R}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{(-x)^5} = \infty$ și cum $G'(x) = f(x) = x\sqrt{1-x},\ x \in (-\infty, 0)$, rezultă $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{G(x)}{\sqrt{(-x)^5}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{G'(x)}{\left(\sqrt{(-x)^5}\right)'} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{\frac{5}{2}x\sqrt{-x}} = \frac{2}{5} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x\sqrt{1-x}}{x\sqrt{-x}} = \frac{2}{5} \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$	2p 1p 2p